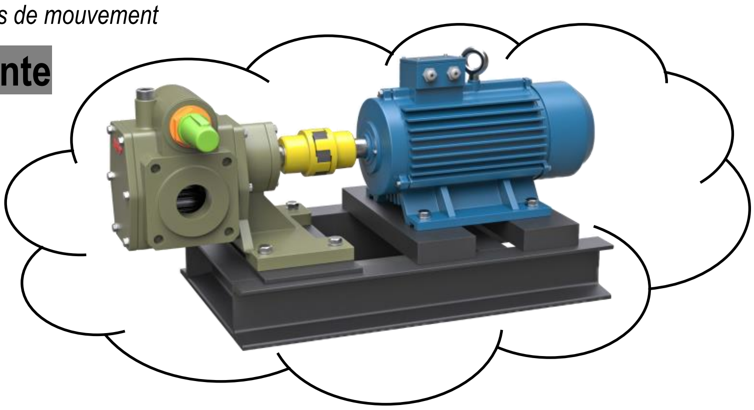
Inertie équivalente



Objectifs

***-1- Calculer** les **caractéristiques motrices** pour obtenir le résultat souhaité (**déplacement**) au niveau de l'effecteur.*

***-2- Calculer** le **Couple résistant équivalent** (**Cr équi**) et calculer l'**Inertie équivalente** ($\mathcal{I}$ **équi**).*

1. Objet et Prérequis

Définition.

Un **mécanisme** étant défini par sa **fonction**, sa **chaîne cinématique**, sa **technologie**, il s'agit de **rechercher** quel doit être le **moteur** à placer à l'entrée du mécanisme pour **obtenir** le **résultat souhaité** au niveau de l'effecteur (**Effecteur** : organe produisant l'effet, c'est-à-dire le travail ou la fonction en bout de chaîne cinématique).

Exemple : le foret, pour une perceuse, est l'effecteur.).

Histoire de rassurer « mes chers lecteurs », vos **Prérequis** (ce que vous connaissez, si vous préférez…) **sont les suivants**, soient :

- Notions sur les **Engrenages** ;
- Connaissances des Lois de la **Cinématique** (mouvement, trajectoire, vitesse, accélération, transformation de mouvement) ;
- Notion de **Géométrie** (Point, ligne, droite, surface plane et circulaire, volume cubique et cylindrique ;
- Calcul de **Moments d'Inertie** (intégrant la notion de **masse** d'un solide).

Ajoutons à ce **petit rappel** que ses **acquis** ont été traités de deux manières (bien souvent) :

- de façon **calculatoire** (calculs sur copie et calculatrice) ;
- en **modélisant** en 3D (utilisation du modeleur 3D Solidworks).

Eléments rencontrés.

Travail, Puissance, Notion de rendement énergétique, Couple, Moment d'inertie, Rapport de transmission, …

Unités utilisées.

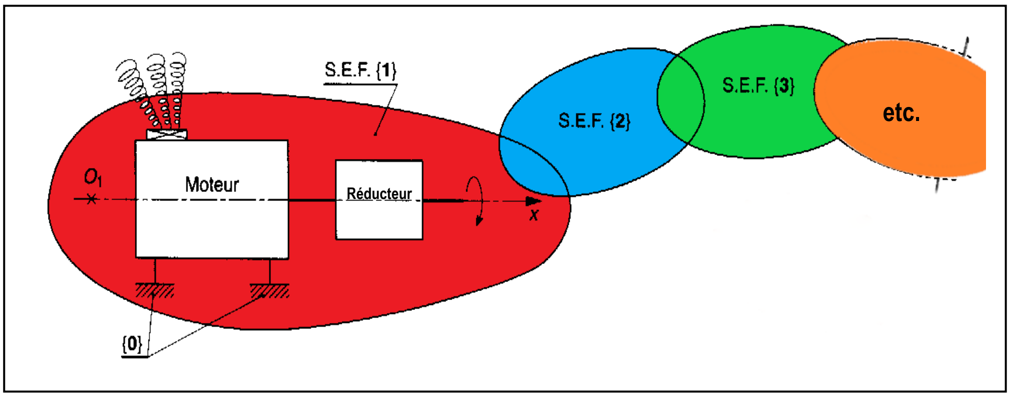
Joule (J), Watt (W), N.m, Kg.m².

Mais avant de « rentrer dans le vif du sujet » (ce nouveau chapitre), j'apporte une petite **précision** sur les premiers termes évoqués que sont la **Fonction**, la **Chaîne cinématique** et la **Technologie** d'un Mécanisme.

- **Fonction** : Ce que doit accomplir le mécanisme.
- **Chaîne cinématique** : Lien physique entre solides.
- **Technologie** : Moyen(s) mise en œuvre.

2. Mise en situation

Considérons la chaîne cinématique ci-contre constituée de plusieurs **S**ous-**E**nsembles **F**onctionnels (**S.E.F.**) {**1**}, {**2**}, {**3**}, {**etc**…}, dont **S.E.F.{1}** est un **moteur** et un **réducteur** animés d'un mouvement de rotation autour de ($\mathbf{O_1}$, $\boldsymbol{x}$).



3. PRINCIPE ET METHODE

3-1. Principe

Ce principe repose sur la définition d'un **système fictif équivalent**, regroupant tous les **S.E.F.** de la Chaîne cinématique, **animé rigoureusement** du même mouvement que le **S.E.F. {1}** (élément moteur).

Ouh la la, je vous entends d'ici :
« Mais qu'est-ce que ça veut dire ??? »

Il s'agit de prendre en compte tous les **S.E.F.** de la **chaîne cinématique** et de considérer qu'**ils agissent** comme s'**ils étaient** directement « **rattachés** » au **S.E.F.{1}** (le MOTEUR), en n'oubliant pas de **conserver** les **liens de transformation** entre **chaque S.E.F.**.

Pas encore CLAIR ?!?
Passons à la méthode !!!

3-2. Méthode

Il s'agit donc d'appliquer le **P.F.D.** (**Principe Fondamental de la Dynamique**) à ce système équivalent, afin de **déterminer** les caractéristiques du **Moteur** (un **Couple moteur**, **Cm** ou **Cmot**) à pouvoir animer la chaîne cinématique qui lui est liée, soit :

Qui dit « **Moteur** », dit « mouvement de **Rotation** », donc…

$\Sigma M = I \times \omega'$ ou $\Sigma C = I \times \omega'$ (il y a plusieurs écritures possibles, vous vous rappelez ?!?)

ou $\Sigma M = I \times \theta''$ ou $\Sigma C = I \times \theta''$ (je vous l'avais dit aussi…)

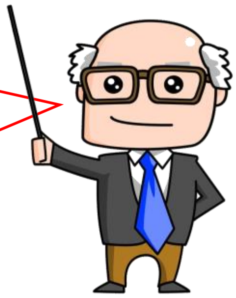
Et bien voici l'écriture que nous adopterons :

$$\boxed{Cm - Créqui = Iéqui \times \theta''_1}$$

(sachez vous adapter !)

De ce côté ci du signe « = », vous trouvez la somme des Couples, soient :
- **1 Couple moteur ;**
- **1 ou plusieurs éléments résistants « ramené(s) » sur l'arbre moteur.**

De ce côté ci du signe « = », vous trouvez :
- **L'Inertie de la Chaîne cinématique « ramenée sur l'arbre moteur ;**
- **L'accélération angulaire du moteur (phase de démarrage).**

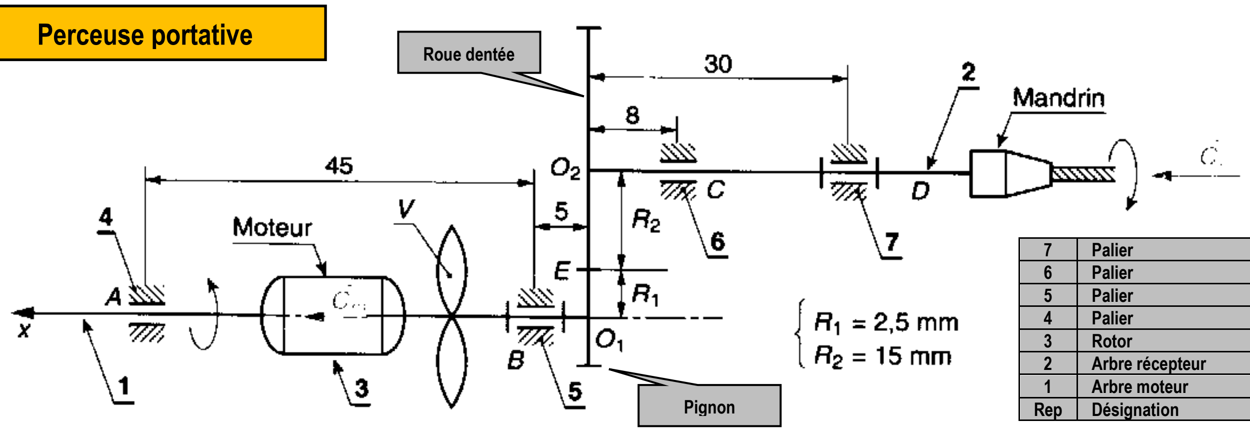


Avec :

- **Cr** équi : **Couple résistant** appliqué au système équivalent, son calcul doit prendre en compte les couples résistants appliqués à la machine (couple de freinage, couples dus aux frottements, ventilateur, …) ;
- **I** équi : **Inertie équivalente** prenant en compte les inerties des différents sous-ensembles. Elle s'exprime en fonction du mouvement de l'élément moteur.

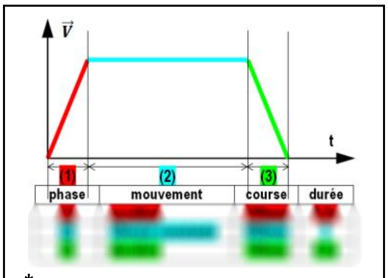
4. APPLICATION A UN SYSTEME EN ROTATION

Perceuse portative



Rep	Désignation
7	Palier
6	Palier
5	Palier
4	Palier
3	Rotor
2	Arbre récepteur
1	Arbre moteur

4.1. Données et hypothèses d'étude



* Exemple de comportement voulu

- **Paramétrage** et **modèle d'étude** (voir ci-dessus) ;
- $I_1 = I_1(O_1, \vec{x})$ = **10⁻⁴ kg.m²**, le Moment d'Inertie du **SEF {1}** par rapport à $(O_1, \vec{x})$;
- $I_2 = I_2(O_2, \vec{x})$ = **4.10⁻⁴ kg.m²**, le Moment d'Inertie du **SEF {2}** par rapport à $(O_2, \vec{x})$;
- Le **Couple résistant** sur le foret : **Cr_2 = 0,6 N.m** ;
- Le **Couple résistant** sur le ventilateur : **Cv = 0,02 N.m** ;
- Le **rapport de transmission r** = ω_2/ω_1 ;
- L'**Accélération angulaire** au démarrage : **θ''_1 = 1260 rad/s²** ;
- Le **rendement** η de la chaîne est supposé égal à **95%**.

4.2. Objectif de l'étude

Il s'agit de **déterminer** le **Couple minimum** que le **moteur** devra exercer pour **démarrer** la machine.

Méthode : **Ecrire** le **TMD** appliqué à l'**Arbre moteur** (**T**héorème du **M**oment **D**ynamique) issu du **PFD**, soit :

$$Cm - Créqui = Iéqui \times \theta''_1$$

Je me dis qu'à force d'écrire la **FORMULE**, vous allez finir par la **RETENIR** !!!

Parmi ces **4 paramètres**, l'**inconnue** que nous cherchons à déterminer est **Cm**, c'est pourquoi, je vous invite à **procéder** de la manière suivante pour **déterminer** les 3 autres, soient :

- **-1- Déterminons** le **Couple résistant équivalent Créqui** de la machine, « ramené » sur l'arbre moteur ;
- **-2- Déterminons** l'**Inertie équivalente Iéqui** de la machine, « ramenée » sur l'arbre moteur ;
- **-3- Calculons** l'**Accélération angulaire θ''_1** souhaitée et correspondant à un comportement **voulu***.

4.2.1 Détermination de Cr $_{équi}$

Conseil / Recommandation :

- **ANALYSER** les données dont vous disposez pour choisir « **JUDICIEUSEMENT** » la bonne formule de départ (pas toujours facile, je vous le concède…) !!!
- Il nous faut une **formule** (peut-être plus, qui sait ?) faisant apparaître un **Couple** (ou des Couples), encore mieux…, un(des) **Couple**(s) présent(s) **sur l'arbre 1** en fonction d'un(des) **Couple**(s) présent(s) **sur l'arbre 2** (ou l'inverse).

Conseil / Recommandation :

- **Ecrivez** tout ce qui vous vient **spontanément**, puis **faites** le TRI, vous finirez par **TROUVER** !

Puissance de **S**ortie

Puissance d'**E**ntrée

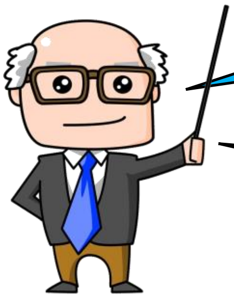
$$\frac{Ps}{Pe} = \eta$$

Rendement

Non ?!? Vous ne voyez toujours pas ?!?
Dans ce cas, **poursuivons** ! Il s'agit de **Solides** (Arbres **1** et **2**) **animés** d'un mouvement de **ROTATION**.
Exprimons leur **Puissance mécanique** délivrée (on peut dire aussi « **UTILE** » !

Mettons-nous d'accord sur les indices à utiliser, puisque nous savons que :

- L'**Arbre 1**, constitue l'élément d'**Entrée** (nous utiliserons l'**indice « 1 »** !!!) ;
- L'**Arbre 2**, constitue l'élément de **Sortie** (nous utiliserons l'**indice « 2 »** !!!).



Ce qui donne :

$$\frac{P_2}{P_1} = \eta \quad \text{avec} \quad P_1 = C_1 \times \omega_1 \quad \text{et} \quad P_2 = C_2 \times \omega_2$$

Etant donné que : $P = C \times \omega$

(N'oubliez-pas que $\omega = \theta'$!!!)

Bref :

$$\frac{C2 \times \omega 2}{C1 \times \omega 1} = \eta \quad \text{d'où} \quad C_1 = C_2 \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{1}{\eta}$$

ATTENTION !!! SOYONS CLAIRS sur ce que représentent C_1 et C_2 !!!

C_2 représente le Couple « Utile » sur l'Arbre 2 pour que celui-ci soit entrainé.
C_1 représente le Couple « Utile » sur l'Arbre 1 pour que celui-ci soit entrainé.

Par conséquent, **C2 mini ≥ Cr2**

Ainsi :

$$C_1 = C_{r2} \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{1}{\eta}$$

(c'est aussi C_1 mini)

Notions sur les Engrenages (VOIR COURS + TD) : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$

Application numérique

$$C_1 = 0{,}6 \times \frac{2{,}5}{15} \times \frac{1}{0{,}95}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0{,}105 \ N.m$$

Bien…, nous avons trouvé C_1 (« un C_1 »). **Mais avons-nous trouvé Créqui ?**
Ce C_1, correspond-il à Créqui ?

La réponse est : « NON » !!!

Je rappelle que le **Créqui** correspond à **TOUTES LES RÉSISTANCES DE LA CHAÎNE CINÉMATIQUE** « ramenées » sur l'**Arbre 1** !!!

Donc, il faut AJOUTER Cv, ce qui donne :

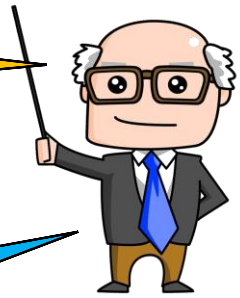
En ajoutant C_v, on obtient :

$$C_{r\,\text{équi}} = C_1 + C_v$$

$$\Rightarrow C_{r\,\text{équi}} = 0{,}105 + 0{,}02$$

$$\Rightarrow C_{r\,\text{équi}} = 0{,}107\ N.m$$

Petit **retour en arrière** et **BILAN** provisoire sur notre **expression** (ou formule de départ) que vous finirez par connaître par cœur (**remplissons EN BLEU** ce que nous **connaissons** !).



$$Cm - 0{,}107 \quad = \quad I\text{équi} \times \theta''_1$$

L'**Étape 1** étant achevée (la détermination du **Créqui**), passons à l'**Étape 2**, soit :
-2- Déterminons l'**Inertie équivalente Iéqui** de la machine, « ramenée » sur l'arbre moteur .

4.2.2 Détermination de $I_{\text{équi}}$

Pour cela, **NOUVEAUTÉ du cours** !!!

Nous allons exprimer l'**ÉNERGIE CINÉTIQUE** de la machine, soit :

NOUVELLE NOTION !!!

Il s'agit de l'énergie utile et nécessaire pour mettre en mouvement un solide ou, au contraire, l'arrêter, c'est-à-dire modifier son comportement.

Ainsi :

$E_C = \frac{1}{2} \times m \times V^2$ (solide en translation) ; $E_C = \frac{1}{2} \times I \times \theta'^2$ (solide en rotation)

- Pour l'**Arbre 1** : $E_{C1} = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1$

Autre écriture possible : $E_{C1} = \frac{1}{2} \times I_1 \times \omega_1^2$

- Pour l'**Arbre 2** : $E_{C2} = \frac{1}{2} \times I_2 \times \theta'^2_2$

- Pour la **perceuse** : $\mathrm{Ec} = \mathrm{Ec}_1 + \mathrm{Ec}_2 = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1 + \frac{1}{2} \times I_2 \times \theta'^2_2$

L'Expression « **Ramener** » sur l'**Arbre 1** veut dire qu'il faut **TOUT EXPRIMER** en fonction de l'**Arbre 1**.

Faisons cela pour l'Energie cinétique de l'Arbre 2, puis voyons ce que cela donne pour celle de la machine, c'est-à-dire la Perceuse !

Voyez-vous le lien entre θ'_2 et θ'_1 ?

Et oui, il s'agit du rapport de transmission !!!

Notions sur les Engrenages (VOIR COURS + TD) :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta'_2}{\theta'_1} = \frac{2{,}5}{15} = \frac{1}{6}$$

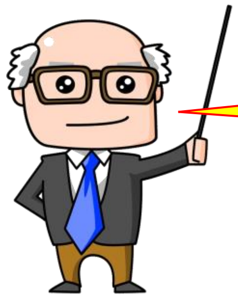
- Pour l'**Arbre 2** : $E_{C2} = \frac{1}{2} \times I_2 \times \theta'^2_2$ ramenée sur l'**Arbre 1** s'écrit : $E_{C2} = \frac{1}{2} \times I_2 \times \left(\frac{\theta'_1}{6}\right)^2$

- Pour la **perceuse** : $\mathrm{Ec} = \mathrm{Ec}_1 + \mathrm{Ec}_2 = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1 + \frac{1}{2} \times I_2 \times \left(\frac{\theta'_1}{6}\right)^2$

Vous voyez, il n'y a plus que θ'_1 dans l'expression de l'énergie cinétique !

Hum, hum…, les « Matheux » vont nous arranger cela, hein ?!?
Une petite « FACTORISATION », peut-être !!!

- Pour la **perceuse** : $\mathrm{Ec} = \mathrm{Ec}_1 + \mathrm{Ec}_2 = \frac{1}{2} \times \left[I_1 + I_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right] \times \theta'^2_1$



Voici notre Inertie équivalente
I équi

Faisons l'application numérique !

$$\text{Donc Iéqui} = I_1 + \left(I_2 \times \frac{1}{6^2}\right):$$

$$\Rightarrow \text{Iéqui} = 10^{-4} + \left(4.10^{-4} \times \frac{1}{36}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Iéqui} = 1{,}11.10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}$$

Petit **retour en arrière** et **BILAN** provisoire sur notre **expression** (ou formule de départ) que vous finirez par connaître par cœur (**remplissons EN BLEU** ce que nous **connaissons** !).

$$Cm - 0{,}107 \quad = \quad 1{,}11.10^{-4} \times \theta''_1$$

L'**Étape 2** étant achevée (la détermination de **Iéqui**), passons à l'**Étape 3**, soit :
-3- Calculons l'**Accélération angulaire** θ''_1 souhaitée et correspondant à un comportement **voulu**.

4.2.3 Détermination de θ''_1

Petit coup d'œil aux **données du problème** !
Nous constatons que l'**Accélération angulaire** de l'**Arbre 1** est **connue** (a déjà fait l'objet d'une étude qui a abouti à ce choix de **θ''_1 = 1260 rad/s²**).

Ainsi :

$$Cm - 0{,}107 \quad = \quad 1{,}11.10^{-4} \times \theta''_1$$

Bilan final :
Une équation et une inconnue, nous pouvons donc résoudre, soit

Faisons l'application numérique !

Bilan :

$$Cm - 0{,}107 = 1{,}11.10^{-4} \times 1260$$

$$\Rightarrow Cm - 0{,}107 = 0{,}14$$

$$\Rightarrow Cm = 0{,}14 + 1{,}107 = 0{,}247 \ Nm$$

Notons qu'il s'agit d'un **Couple moteur** déterminé durant la phase d'**Accélération** (phase de **démarrage**), nous parlerons donc de **Couple de démarrage**, noté **Cd** !

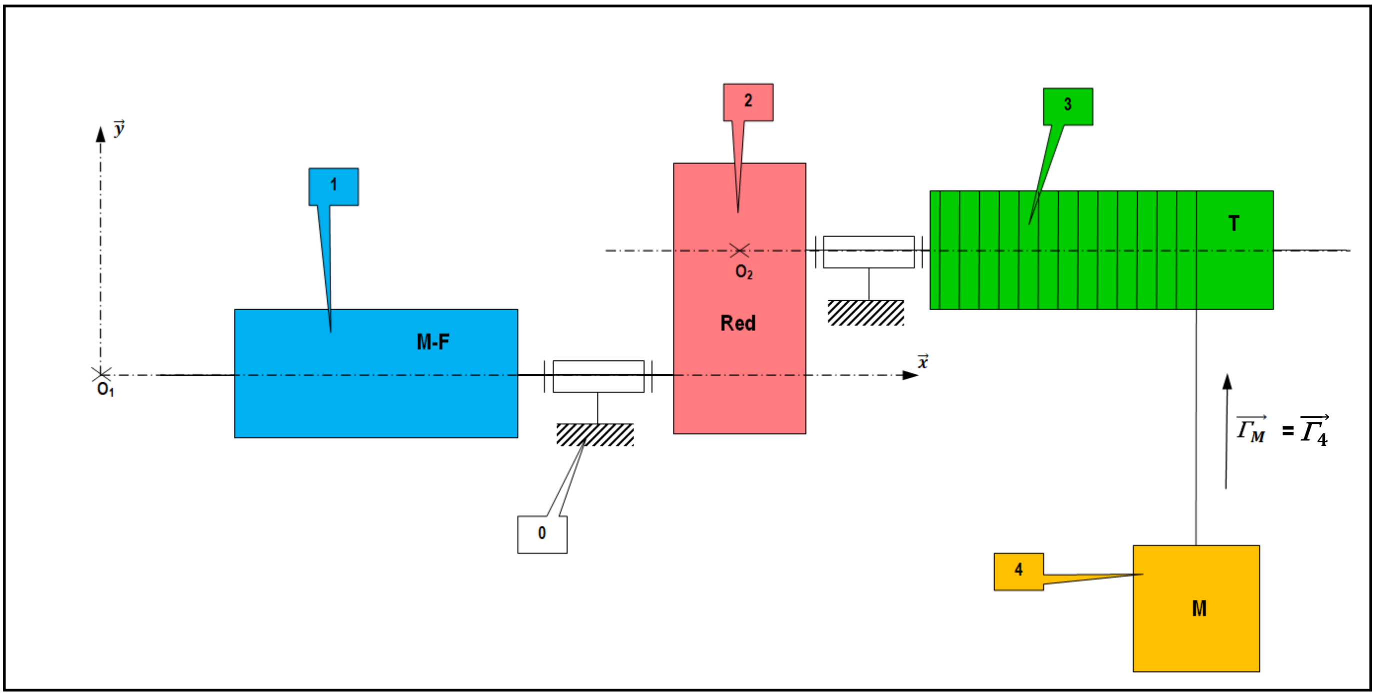
5. Application a un systeme ou les mouvements sont de nature différente

5.1. Données et hypothèses d'étude

▪ La chaîne cinématique ci-après comporte : un **Moteur Frein M-F**, un **Réducteur de vitesse Red**, un **tambour de treuil T** de rayon **R**, un câble supportant la **Charge** de masse **M** ;
▪ On néglige la masse du câble, et on donne : **M = 200 kg** ; **g = 9,81 m/s²** ; **R = 0,1 m** ; rapport de réduction du Réducteur **r = 0,026** ; **rendement** de l'ensemble du treuil **η = 0,65** ;

4.4-Comportement dynamique et énergétique des transmetteurs de mouvement

- L'étude se situe **au début du mouvement de montée** de la charge, celle-ci possède alors une **Accélération verticale** telle que Γ_M **= 0,1 m/s²** (ou Γ_4);
- $I_1 = I_1(O_1, \vec{x})$ **= 0,08 kg.m²**, le **Moment d'Inertie** de l'**Arbre Moteur-Frein 1** et des éléments qui lui sont liés par rapport à (O_1, $\vec{x}$) ;
- $I_3 = I_3(O_2, \vec{x})$ **= 234,68 kg.m²**, le **Moment d'Inertie** de l'**Arbre de Tambour de Treuil 3** et des éléments qui lui sont liés par rapport à (O_2, $\vec{x}$) ;



5.2. Objectif de l'étude

Il s'agit de **déterminer** le **Couple minimum** que le **moteur** devra exercer pour **démarrer** la machine et **soulever** la Charge.

Méthode : **Ecrire** le **TMD** appliqué à l'**Arbre moteur** (**T**héorème du **M**oment **D**ynamique) issu du **PFD**, soit :

$$C_m - C_{réqui} = I_{équi} \times \theta''_1$$

Je pense que vous commencez à connaître **FORMULE**, ainsi que la **MÉTHODE** !!!

Parmi ces **4 paramètres**, l'**inconnue** que nous cherchons à déterminer est **Cm**, c'est pourquoi, je vous invite à **procéder** de la manière suivante pour **déterminer** les 3 autres, soient :

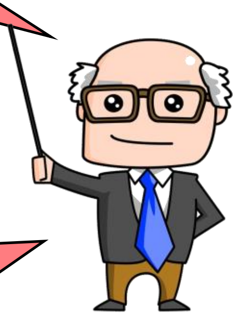
- **-1- Déterminons** le **Couple résistant équivalent** **Créqui** de la machine, « ramené » sur l'arbre moteur ;
- **-2- Déterminons** l'**Inertie équivalente** **Iéqui** de la machine, « ramenée » sur l'arbre moteur ;
- **-3- Calculons** l'**Accélération angulaire** θ''_1 souhaitée et correspondant à un comportement **voulu**.

5.2.1 Détermination de $Cr_{\text{équi}}$

Conseil / Recommandation :

- **ANALYSER** les données dont vous disposez pour choisir « **JUDICIEUSEMENT** » la bonne formule de départ (pas toujours facile, je vous le concède…) !!!
- Il nous faut une **formule** (peut-être plus, qui sait ?) faisant apparaître un **Couple** (ou des Couples), encore mieux…, un(des) **Couple**(s) présent(s) **sur l'arbre 1** en fonction d'un(des) **Couple**(s) présent(s) **sur l'arbre 3** (ou l'inverse).

Conseil / Recommandation :
- **Ecrivez** tout ce qui vous vient **spontanément**, puis **faites** le TRI, vous finirez par **TROUVER** !



Puissance de Sortie

Puissance d'Entrée

$$\frac{Ps}{Pe} = \eta$$

Rendement

Mettons-nous d'accord sur les indices à utiliser, puisque nous savons que :
- L'**Arbre 1**, constitue l'élément d'**Entrée** (nous utiliserons l'**indice « 1 »** !!!) ;
- L'**Arbre 3**, constitue l'élément de **Sortie** (nous utiliserons l'**indice « 3 »** !!!).

Ce qui donne :

$$\frac{P_3}{P_1} = \eta \quad \text{avec} \quad P_1 = C_1 \times \omega_1 \quad \text{et} \quad P_3 = C_3 \times \omega_3$$

Etant donné que : $P = C \times \omega$

(N'oubliez-pas que $\omega = \theta'$!!!)

Bref :

$$\frac{C3 \times \omega 3}{C1 \times \omega 1} = \eta \quad \text{d'où} \quad C_1 = C_3 \times \frac{\omega_3}{\omega_1} \times \frac{1}{\eta}$$

ATTENTION !!! SOYONS CLAIRS sur ce que représentent C_1 et C_3 !!!

C_3 représente le Couple « Utile » sur l'Arbre 3 pour que celui-ci soit entrainé.
C_1 représente le Couple « Utile » sur l'Arbre 1 pour que celui-ci soit entrainé.

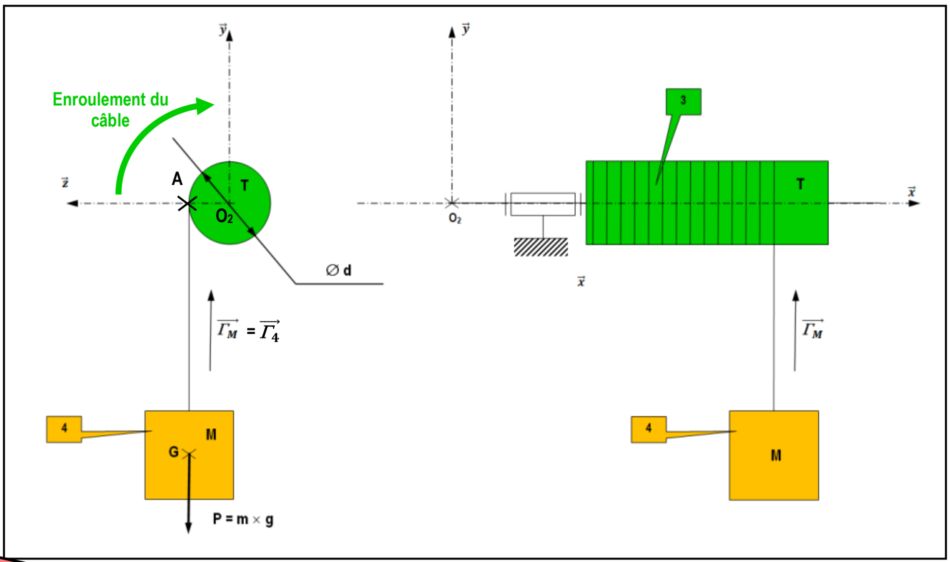
Par conséquent, **$C3\ mini \geq$???**

Tiens tiens…
Par comparaison avec l'étude précédente (JETEZ-Y UN COUP D'ŒIL !!!), il n'y a pas de Couple résistant « Cr » évoqué dans le nouvel énoncé, il y aurait-il une erreur ???

Et **NON**, je suis au regret de vous annoncer, qu'il n'y a **aucune erreur et/ou oubli** dans l'énoncé du problème !
Et pourtant, il y a bien **RÉSISTANCE** au **Moteur-Frein**, mais **qui/quoi** et **ou** ?

Inutile de faire durer le suspens plus longtemps, d'autant plus que certains d'entre vous ont déjà trouvé.
En effet, il s'agit bien de la **Charge à soulever** (cas le plus défavorable, vous en conviendrez certainement), dont l'**action mécanique** est **décalée** par rapport à l'axe **de rotation de l'Arbre de Tambour du Treuil 3** (modélisons cela, page suivante !), provoquant ainsi un **Couple**.

Voici donc la **modélisation** du **Tambour de treuil T** et de la **Charge** à soulever, dont l'action (ou force) transite le long du câble, lequel sera « tiré » par le Tambour (par « enroulement »).



Rappel pour les uns, nouveauté pour les autres :
« Sachez que la **force** (on dit aussi « **effort** ») générée par le **Poids de la Charge à soulever** (**P = m × g**) et passant en **A** (à la verticale de **G**) provoque un mouvement de rotation autour de l'axe (**O_2**, $\vec{x}$), donc un **Couple C** que le moteur devra **VRAINCRE** pour soulever la **Charge**.

Etant donné que se **Couple C** s'oppose à l'**action du Moteur** (au **Couple Moteur Cm**), appelons-le **Couple résistant Cr** !

Revenons à notre question précédente, soit : C3 mini ≥ ???

Réponse, C3 mini ≥ Cr

Calculons Cr !

Couple = Force × distance, soit :
Cr = Poids × rayon Tambour
$\Rightarrow Cr = (m \times g) \times R$
$\Rightarrow Cr = (200 \times 9{,}81) \times 0{,}1$
$\Rightarrow Cr = 196{,}1\ Nm$

Ainsi :

Réponse, C3 mini ≥ 196,1 Nm

Puis :

$$C_1 = C_3 \times \frac{\omega_3}{\omega_1} \times \frac{1}{\eta}$$

(c'est aussi C_1 mini)

Le **rapport de transmission** du **réducteur** est donné dans l'énoncé, tout comme son **rendement**, soient :
- **r = 0,026 et η = 0,65.**

Faisons l'application numérique !

Application numérique

$$C_1 = 196{,}1 \times 0{,}026 \times \frac{1}{0{,}65}$$

$$\Rightarrow C_1 = 7{,}844\ N.m$$

Bien…, nous avons trouver C_1 (« un C_1 »). **Mais avons-nous trouvé Créqui ?**
Ce C_1, correspond-il à Créqui ?

La réponse est : « OUI » !!!

Les liaisons au niveau des paliers (guidages) permettent de négliger les frottement générés peu significatifs. Il n'y a pas d'autres résistances à déplorer sur le système.

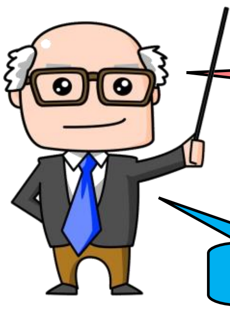
Petit **retour en arrière** et **BILAN** provisoire sur notre **expression** (ou formule de départ) que vous connaissez par cœur (**remplissons EN BLEU** ce que nous **connaissons** !).

Cm – 7,844 = Iéqui × θ''₁

$$Cm - 7{,}844 = I_{équi} \times \theta''_1$$

L'**Étape 1** étant achevée (la détermination du **Créqui**), passons à l'**Étape 2**, soit :
-2- Déterminons l'**Inertie équivalente** Iéqui de la machine, « ramenée » sur l'arbre moteur .

5.2.2 Détermination de $I_{équi}$



Pour cela, nous allons exprimer l'**ÉNERGIE CINÉTIQUE** de la machine, soit :

Rappel : $E_C = \frac{1}{2} \times m \times V^2$ **(solide en translation) ;** $E_C = \frac{1}{2} \times I \times \theta'^2$ **(solide en rotation)**

Ainsi :

- Pour le **M-F** et son Arbre: $E_{C1} = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1$

Autre écriture possible : $E_{C1} = \frac{1}{2} \times I_1 \times \omega_1^2$

- Pour le **Tambour** et son Arbre : $E_{C3} = \frac{1}{2} \times I_3 \times \theta'^2_3$
- Pour la **Charge** à soulever : $E_{C4} = \frac{1}{2} \times m_4 \times V_4^2$

- Pour l'ensemble du **Système** : $Ec = Ec_1 + Ec_3 + Ec_4 = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1 + \frac{1}{2} \times I_3 \times \theta'^2_3 + \frac{1}{2} \times m_4 \times V_4^2$

Il faut exprimer ces **3 Energies Cinétiques** en fonction de l'**Arbre du M-F 1** !
Procédons méthodiquement, soient :
-1- **Tout d'abord**, exprimons **EC_2** en fonction de θ'_1 ;
-2- **Puis** exprimons **EC_3** (**ATTENTION !!! ici il y aura 2 étapes de calculs**).

De nouveau, le lien entre θ'_3 et θ'_1 ?

Et oui, il s'agit du rapport de transmission !!!

Notions sur les Engrenages (VOIR COURS + TD) :

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\theta'_3}{\theta'_1} = 0{,}026 \text{ (voir énoncé)}$$

- Pour le **Tambour** et son Arbre : $Ec_3 = \frac{1}{2} \times I_3 \times \theta'^2_3$ ramenée sur l'Arbre du **M-F** s'écrit :

$$Ec_3 = \frac{1}{2} \times I_2 \times (0{,}026 \times \theta'_1)^2$$

Etape 1
Notions de Cinématique (acquis antérieurs) :

$$V = \omega \times r \quad \text{ou} \quad V = \theta' \times r$$

donc :

$$V_4 = \theta'_3 \times R$$

Ici, nous devons « passer » de la Charge au Tambour, puis du Tambour au M-F, soient 2 étapes !!!

Etape 2
Notions sur les Engrenages (VOIR COURS + TD) :

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\theta'_3}{\theta'_1} = 0{,}026 \text{ (voir énoncé)}$$

- Pour la **Charge** à soulever : $Ec_4 = \frac{1}{2} \times m_4 \times V_4^2$ ramenée sur l'Arbre du **Treuil** s'écrit :

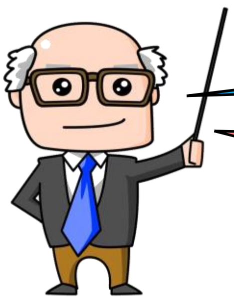
Etape 1

$$Ec_4 = \frac{1}{2} \times m_4 \times (\theta'_3 \times R)^2$$ ramenée sur l'Arbre du **M-F** s'écrit :

Etape 2

$$Ec_4 = \frac{1}{2} \times m_4 \times (\theta'_1 \times 0{,}026 \times R)^2$$

- Pour l'ensemble du **Système** : $Ec = Ec_1 + Ec_3 + Ec_4 = \frac{1}{2} \times I_1 \times \theta'^2_1 + \frac{1}{2} \times I_2 \times (0{,}026 \times \theta'_1)^2 + \frac{1}{2} \times m_4 \times (\theta'_1 \times 0{,}026 \times R)^2$



Vous voyez, il n'y a plus que θ'_1 dans l'expression de l'énergie cinétique !

Hum, hum..., les « Matheux » vont nous arranger cela, hein ?!?
Une petite « FACTORISATION », peut-être !!!

- Pour l'ensemble du **Système** : $Ec = Ec_1 + Ec_3 + Ec_4 = \frac{1}{2} \times \left[I_1 + I_2 \times 0{,}026^2 + m_4 \times (0{,}026 \times R)^2 \right] \times \theta'^2_1$

Voici notre Inertie équivalente : I équi

Faisons l'application numérique !

$$\text{Donc } I\acute{e}qui = I_1 + (I_2 \times 0{,}026^2) + [m_4 \times (0{,}026 \times R)^2$$

$$\Rightarrow I\acute{e}qui = 0{,}08 + (234{,}68 \times 0{,}026^2) + [200 \times (0{,}026 \times 0{,}1)^2$$

$$\Rightarrow I\acute{e}qui = 0{,}24 \text{ kg.m}^2$$

Petit **retour en arrière** et **BILAN** provisoire sur notre **expression** (ou formule de départ). **Remplissons EN BLEU** ce que nous **connaissons** !

$$Cm - 7{,}844 = 0{,}24 \times \theta''_1$$

L'**Étape 2** étant achevée (la détermination de **Iéqui**), passons à l'**Étape 3**, soit :
-3- Calculons l'**Accélération angulaire** θ''_1 souhaitée et correspondant à un comportement **voulu**.

5.2.3 Détermination de θ''_1

Petit coup d'œil aux **données du problème** !
L'**élévation souhaitée de la Charge** doit être d'une **Accélération LINÉAIRE** de **ΓM = 0,1 m/s²** (ou Γ_4).

Connaissant L'Accélération « **en sortie de Système** », il nous faut 'l'estimer » à son **Entrée** !

Procédons en **2 étapes**, comme pour l'**Inertie Equivalente Iéqui**, soient :
-1- Relation entre **Charge** et **Tambour** ;
-2- relation entre **Tambour** et **M-F**.

Etape 1
Notions de Cinématique (acquis antérieurs) :

$$V_4 = \theta'_3 \times R$$

de même que :

$$\Gamma_4 = \theta''_3 \times R$$

Etape 2
Notions sur les Engrenages (VOIR COURS + TD) :

$$\frac{\theta'_3}{\theta'_1} = \frac{\theta''_3}{\theta''_1} = 0{,}026 \text{ (voir énoncé)}$$

- Donc : $\Gamma_4 = \theta''_3 \times R$ (ramenée sur l'Arbre du **Treuil**)
- Puis : $\Gamma_4 = \theta''_1 \times 0{,}026 \times R$ (ramenée sur l'Arbre du **M-F**)
- Ainsi : $\theta''_1 = \dfrac{\Gamma_4}{0{,}026 \times R}$

Etape 1

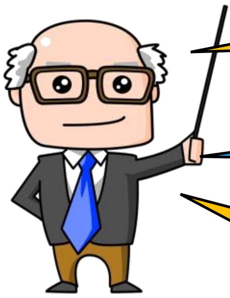
Etape 2

Faisons l'application numérique !

Application numérique :

$$\theta''_1 = \frac{\Gamma_4}{0{,}026 \times R} = \frac{0{,}1}{0{,}026 \times 0{,}1} = \frac{1}{0{,}026}$$

$$\Rightarrow \theta''_1 = 38{,}46\ rad/s^2$$



Petit **retour en arrière** et **BILAN** final sur notre **expression** (ou formule de départ).

Ainsi :

$$\boxed{Cm - 7{,}844 \;=\; 0{,}24 \times 38{,}46}$$

Bilan final :
Une équation et une inconnue, nous pouvons donc résoudre, soit

Faisons la Résolution finale !

$$Cm - 7{,}844 = 0{,}24 \times 38{,}46$$
$$\Rightarrow Cm - 7{,}844 = 9{,}23$$
$$\Rightarrow Cm = 9{,}23 + 7{,}844$$
$$\Rightarrow Cm = 17{,}074\ N.m$$

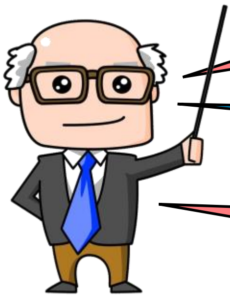
Notons qu'il s'agit d'un **Couple moteur** déterminé durant la phase d'**Accélérétion** (phase de **démarrage**), nous parlerons donc de **Couple de démarrage**, noté **Cd** !

5.3. Couple moteur en régime permanent

Il s'agit de **déterminer** le **Couple moteur** dans sa phase de régime établi (ou permanent), période durant laquelle, la charge se déplace à vitesse constante.

Méthode : **Ecrire** le **TMD** appliqué à l'**Arbre moteur** (**T**héorème du **M**oment **D**ynamique) issu du **PFD**, soit :

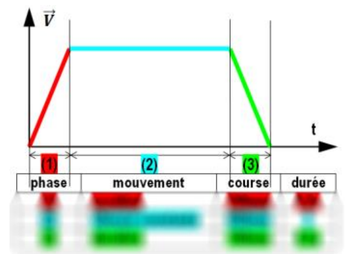
$$\boxed{Cm - Créqui \;=\; Iéqui \times \theta''_1}$$



Quels sont les changements significatifs ? Y en a-t'il ?

La réponse est : « OUI » !!!

De quel(s) Changement(s) s'agit-il, alors ?



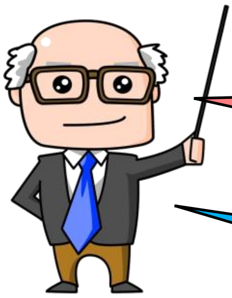
*** Exemple de comportement voulu**

En s'appuyant sur la courbe de comportement ci-contre, nous pouvons nous apercevoir que nou sommes passés de la phase 1 (accélération) à la phase 2 (vitesse constante), c'est-à-dire accélération nulle.
Traduction, ci-dessous :

$$Cm - Créqui = Iéqui \times 0$$

$$Cm - Créqui = 0$$

$$Cm = Créqui = 7{,}844\ N.m$$



Ce Couple en régime permanent correspond au **Couple Nominal** noté **Cn**.

Maintenant, place aux EXERCICES !!!